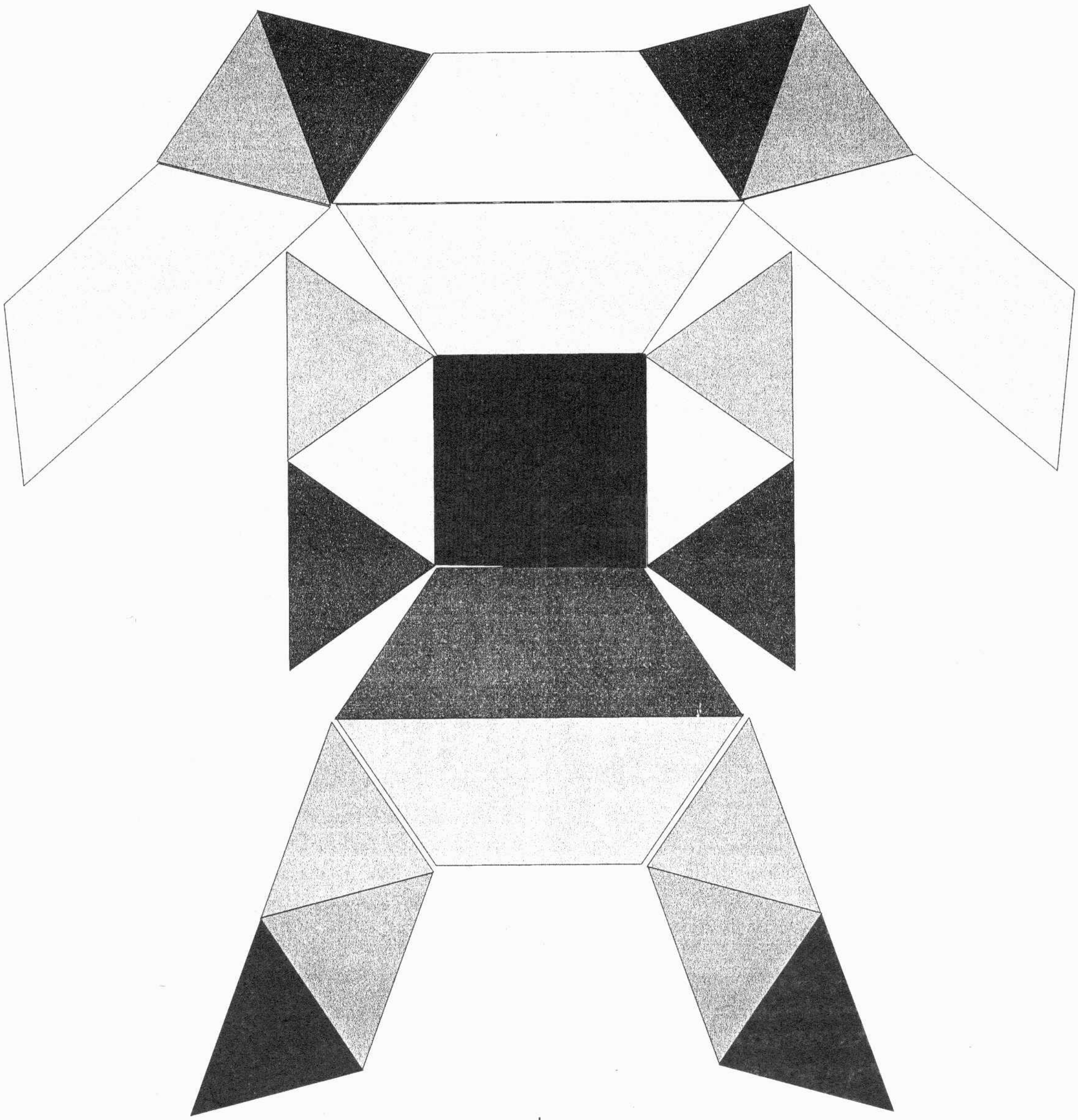
Krzysztof Mostowski

Gwiazdka, dwunastościan rombowy gwiaździsty



To jest siatka bez kleju pewnej formy przestrzennej, która nazwana została łódką, chociaż siatka jak na nią tu patrzysz, raczej przypomina małą dziewczynkę z warkoczykami.

• Trzeba skopiować na kserografie ten kształt i wyciąć tę formę z papieru.

• Wzdłuż linii oddzielających kolory trzeba **pociągnąć lekko długopisem**, tak aby papier w tym miejscu można było zagiąć równo.

• Wszystkie zagięcia trzeba wykonać „**od siebie**", tak aby „**grań**" była skierowana do Ciebie. Wszystkie za wyjątkiem dwóch, tych na granicy kwadratu koloru czarnego i jasnego trójkąta, który jest częścią bocznych skrzydełek w formie trapezu. Wzdłuż tych dwóch linii trzeba zagiąć „**do siebie**", tak aby powstała „**dolinka**".

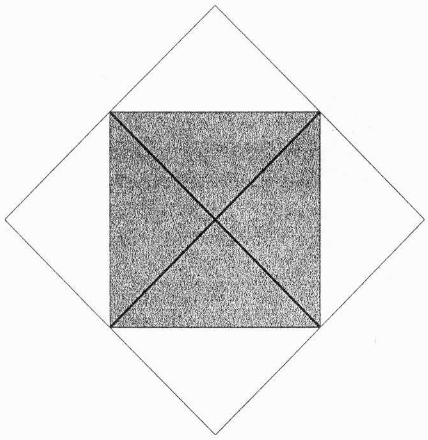
• Jak przebrnąłeś już przez poprzednie etapy, to możesz już siatkę składać, tak aby powstała zapowiadana bryła w kształcie łódki. Zacznij od góry, od „warkoczyków". Powstanie wtedy forma przestrzenna wklęsła, o jednej ścianie kwadratowej, dwóch ścianach w kształcie trapezu i sześciu ścianach trójkątnych. Ta gmatwanina ścian po złożeniu przypomina łódkę.

Z sześciu takich łódek można złożyć **Gwiazdkę**. Takie Gwiazdki są widoczne na okładce tego zeszytu NiMa. Gwiazdka jest to **dwunastościan rombowy gwiaździsty**, ma 12 przenikających się ścian. Każda z tych ścian ma kształt rozłożonych skrzydeł motyla. Możesz sam sobie narysować takie siatki za pomocą komputera i jakiegokolwiek programu, który rysuje. Najlepiej wtedy nie stosować kolorów i wydrukować 6 takich siatek Gwiazdki na kolorowym papierze: 2 na żółtym, 2 zielonym, 2 na niebieskim.

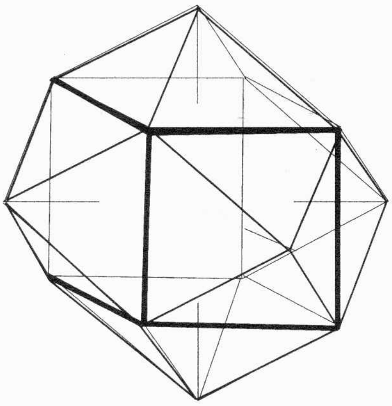
Łódki można zmontować wtedy w taki sposób, aby trzy kolory wyznaczały 3 prostopadłe płaszczyzny w przestrzeni. Wyjaśnienia zaczniemy od dwunastosciany rombowego.

Dwunastościan rombowy to jest trudna bryła. Można go sobie wyobrazić w taki sposób:

Najpierw wyobraź sobie sześcian i sześć ostrosłupów o wspólnym wierzchołku w środku sześcianu, zbudowanych na ścianach tego sześcianu. Teraz dla każdego z tych ostrosłupów zbuduj w myśli odbicie symetryczne w płaszczyźnie jego podstawy. Na sześcianie powstanie wtedy sześć piramidek. Każda z nich ma cztery ściany boczne. Wydaje się więc, że powstanie coś w rodzaju gwiazdki o 24 ścianach i sześciu kolcach. Tak jednak nie jest bo dwie ścianki sąsiadujące ze sobą poprzez krawędź sześcianu są w jednej płaszczyźnie i tworzą jedną ścianę. Można się o tym przekonać patrząc na sześcian z profilu:



i trochę z boku:



Powstanie więc bryła o dwunastu ścianach, a nie o 24. Wszystkie te ściany mają jednakowy kształt, kształt rombu. Przekątne tego rombu mają proporcję wyznaczoną przez liczbę pierwiastek z dwóch, gdyż dłuższa przekątna każdego rombu jest taka, jak przekątna ściany sześcianu, a krótsza jest taka jak krawędź sześcianu. Ta bryła nazywa się dwunastościanem rombowym. To jest bardzo ładna bryła i niestety rzadko spotykana w pracowniach szkolnych. Trudno ją sobie wyobrazić patrząc na rysunek. Trzeba wziąć do ręki model i popatrzeć na niego z różnych stron. Taki model można zrobić z czterech pasków, każdy pasek składa się z sześciu rombów ułożonych „wężowato", a każdy z tych rombów ma proporcje przekątnych $\sqrt{2}$.

Dwunastościan rombowy gwiaździsty to jest jeszcze trudniejsza bryła. Ale teraz jesteśmy gotowi, żeby ją opisać i i dobrze ją sobie wyobrazić. Zrobimy z dwunastościanem rombowym ten sam eksperyment myślowy, co z sześcianem.

Wyobraź sobie, że na każdej ścianie dwunastościanu rombowego zbudowany jest ostrosłup, który ma wierzchołek dokładnie w środku tego dwunastościanu, a podstawą jest ściana dwunastościanu. Wszystkie te ostrosłupy mają wspólny wierzchołek, a podstawy mają kształt rombu, tego znanego rombu. Teraz znów dokonaj operacji wywracania „na lewą stronę". Wyobraź sobie odbicia symetryczne w płaszczyźnie podstawy każdego z dwunastu ostrosłupów. Powstanie wtedy gwiazda o dwunastu kolcach w kształcie ostrosłupów. Każdy z nich ma 4 ściany. Razem będzie 48 ścian. Wydaje się, że tym razem nie będzie tak, jak poprzednio, że ściany się łączyły po dwie. Ale jeżeli masz model w ręku, to zobaczysz coś ciekawego. Wokół każdej rombowej ściany dwunastościanu, z którego powstała Gwiazdka są cztery rombowe ściany Gwiazdki, które układają się w tej samej płaszczyźnie, co ta ściana. Ta ściana i te cztery rombowe ściany wokół niej tworzą jakby jedną ścianę w kształcie sześciokąta wklęsłego, coś na kształt litery X, ale nie całkiem. Raczej skrzydła motyla. Takich ścian jest tyle, ile jest ścian dwunastościanu, od którego to się zaczęło. Jest ich dwanaście. Na Gwiazdkę można popatrzeć jak na 12-ścian o przenikających się ścianach w kształcie dziwnych sześciokątów! Czyżby to był znów dwunastościan? Tak, dwunastościan rombowy gwiaździsty. Już wiemy co to znaczy gwiaździsty – z grubsza mówiąc, o przenikających się ścianach, układających się w pierścień.

Podobnie można potraktować wielościan, który został nazwany przez Keplera **stellą octangulą**. Można na niego spojrzeć jak na **ośmiościan gwiaździsty**, który jest sumą dwóch przenikających się czworościanów. W taki sposób można spojrzeć na wiele innych brył.

I co dalej? Czy to już skończona bajka? Nie. Przyjrzyj się uważnie Gwiazdce. Można ją zmieścić w sześciennym pudełku. Ten sześcian ma wtedy puste naroża. Każde puste naroże ma trzy kwadratowe ściany, które są ćwiartkami sześciennego pudełka. Jest ich osiem. Co się stanie, gdy te puste naroża zsunąć razem w taki sposób, aby kwadratowe ściany tych naroży przylegały do siebie, te ćwiartki ścian pudełka? Co wtedy powstanie? Powstanie forma w dziwnie znajomym kształcie. Ta dziura, bo przecież naroża były puste, ma kształt Gwiazdki. A więc do Gwiazdki można dosunąć osiem takich samych Gwiazdek, które narożami dosuną się i szczelnie będą pasować do środkowej Gwiazdki, do tych Gwiazdek można dosunąć następne Gwiazdki i tak dalej. Ta Gwiazdka, mimo że ma taką wydawało by sie nieregularna powierzchnię ma bardzo szczególna własność. Tymi Gwiazdkami można wypełnić całą przestrzeń, nie pozostawiając luk. Na tej fotografii można to spostrzec.

A teraz znów proponuję pewien eksperyment myślowy. Wyobraź sobie jedną taką „pustą przestrzeń" w rogu sześcianu, do którego wsunąłeś Gwiazdkę. Matematycznie powiedziałbym, że ta Gwiazdka została wpisana w sześcian, a ten sześcian jest opisany na Gwiazdce. Gdy do *pustego miejsca* z rogu tego sześcianu dostawisz drugie *puste miejsce* z przeciwległego rogu sześcianu, to zobaczysz, że te *puste miejsca* razem tworzą *pusty sześcian.*

To już chyba się domyślasz, co będzie dalej. Operacja wywracania „na lewą stronę" całej Gwiazdki daje sześcian. Operacja NLS (Na Lewą Stronę) tworzy taki ciąg brył:

sześcian —> dwunastościan rombowy —> Gwiazdka —> sześcian —> ...

Ten nieskończony ciąg można uzupełnić w drugą stronę, do środka, dostając co raz mniejsze bryłki:

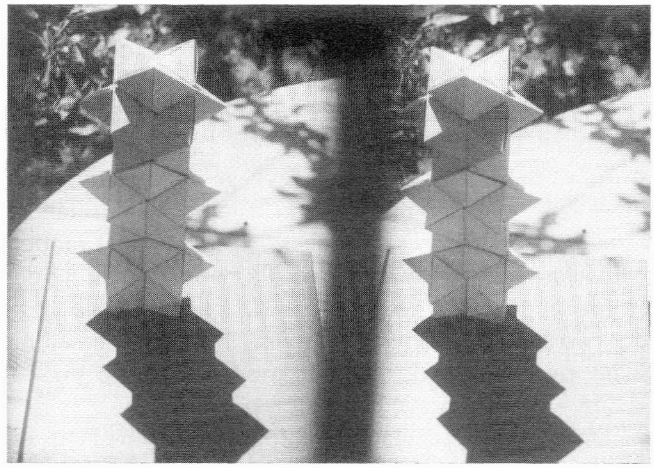
... <— sześcian <— dwunastościan rombowy <— Gwiazdka <— sześcian

Oglądając modele mamy zachętę do stawiania pytań. Na niektóre łatwo odpowiedzieć. Np. Jaką objętość ma Gwiazdka? Inne mogą nie być takie proste. Ale jest o co pytać. A te formy są po prostu ładne.

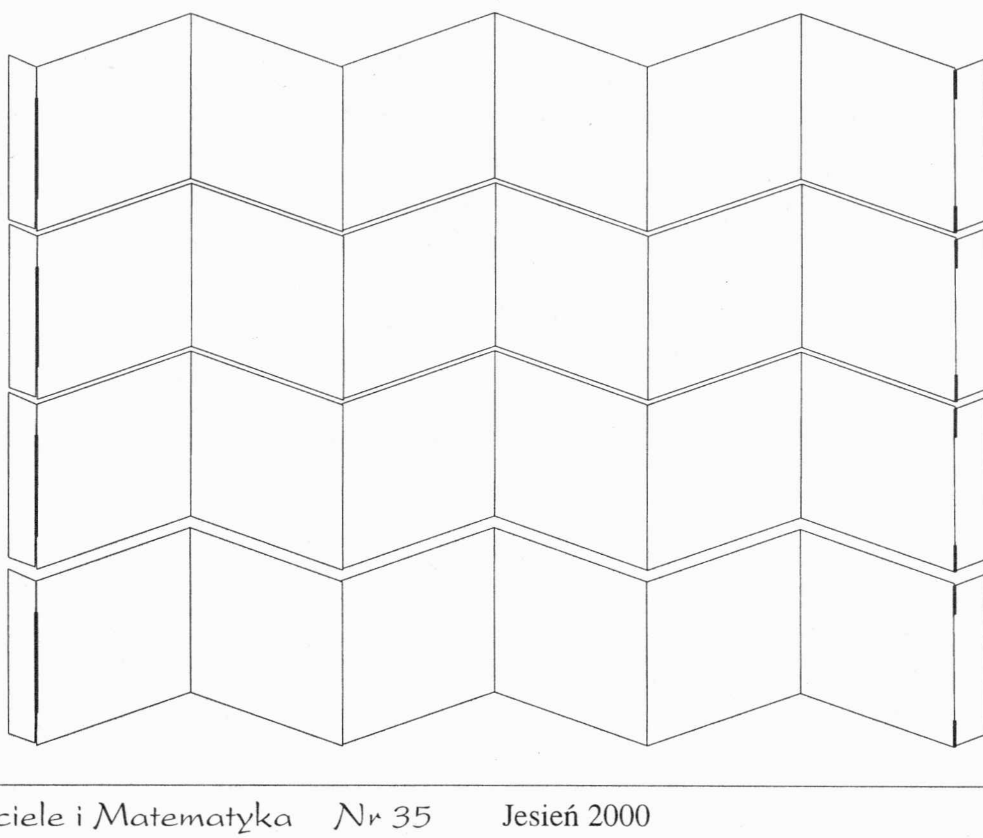
Literatura

H. M. Cundy i A. P. Rollett, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1967, str. 120 i 126 rys. 154,

K. Mostowski, W. Zawadowski, *Składanki*, WSiP, Warszawa 1997, 1998.



W tym zeszycie NiM-a zamieszczamy kilka fotografii stereo, tzn. podwójnych fotografii, wykonanych za pomocą specjalnej nasadki firmy Pentax na zwykły obiektyw. Na te zdjęcia trzeba patrzeć przez specjalne okulary, które najlepiej zrobić sobie samemu. W tym celu trzeba zdobyć okulary +3, lub +4 dioptrii. Może ktoś w rodzinie potrzebuje silniejszych szkieł, a stare mu są już niepotrzebne, wtedy sprawa jest prosta. Gdy nie ma takiej okazji, warto wiedzieć, że takie okulary „do czytania" dla starszych osób, +3 lub +4, symetryczne, można kupić na targu za około 10 zł. Nie jest to wielki wydatek. Trzeba szkła wyjąć z oprawek i umieścić je na deseczce z wyciętymi otworami prostokątnymi, wielkości 2,5 cm x 2 cm. Te prostokąty powinny być w odległości odpowiadającej Twojemu odstępowi oczu, tj. zwykle około 55-60 mm. Na te otwory trzeba nałożyć szkła asymetrycznie, tak aby pokrywały otwory boczną częścią. W tej pozycji trzeba je umocować np. taśmą klejącą. No i aparacik do oglądania zdjęć stereo gotowy. W następnych zeszytach NiM-a będziemy systematycznie umieszczać zdjęcia stereo różnych modeli geometrycznych i szykujemy różne niespodzieanki. A więc wykonanie takich okularów się opłaci.



Dodatek

Jako dodatek do tego opowiadania o Gwiazdce, czyli dwunastościanie rombowym gwiaździstym, dołączamy

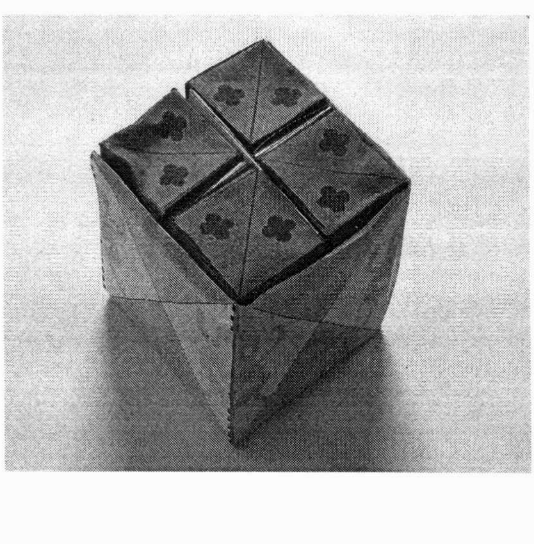
1 Siatki tych łódek, z których składa się model Gwiazdki, dwie na jednym arkuszu A4, tak aby można było model zbudować już z trzech kolorowych kartek A4 . Najdłuższa krawędź ma na tym modelu około 62 mm.

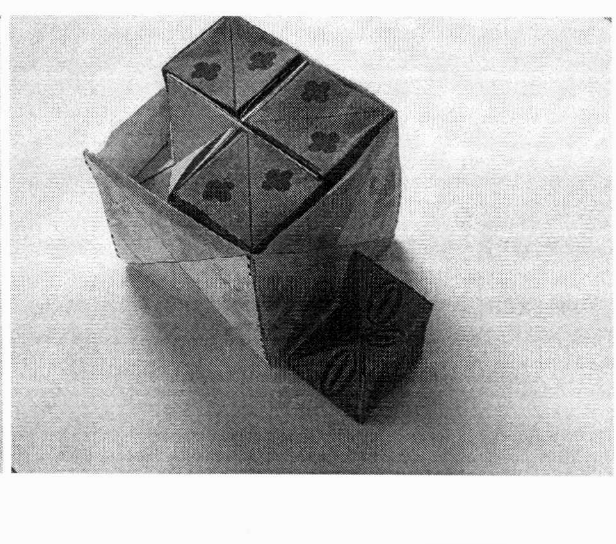
2 Dwie siatki do zbudowania bez kleju pudełka w kształcie sześcianu, w którym można zmieścić Gwiazdkę. Krawędź sześcianu ma koło 62 mm, ale jedna z siatek, ta z szarymi trójkątnymi figurami ma trochę krótsze krawędzie, a ta z czarnymi nieco dłuższe niż 62 mm. Zaprojektowane jest to tak dlatego, żeby po złożeniu sześcienne pudełka dały się łatwo nasunąć jedno na drugie, a w środku mogła się zmieścić Gwiazdka.

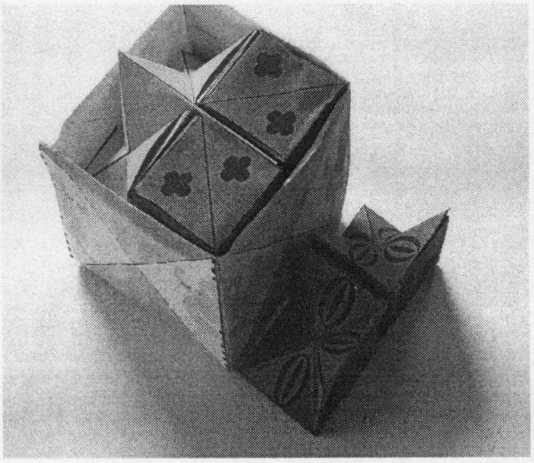
3 Dołączamy jeszcze 8 siatek, z których można złożyć naroża uzupełniające Gwiazdkę, włożoną do sześcianu, do pełnego sześcianu. Każde zgięcie zaznaczone kropką na tych siatkach powinno tworzyć "dolinkę", pozostałe zgięcia "grzbiet". Każdy z tych rożków ma trzy ściany w formie kwadratu o krawędzi dwa razy mniejszej od krawędzi sześciennego pudełka. Pozostałe ścianki są w kształcie trójkątów – połówek rombów o proporcji przekątnych wyznaczonej przez liczbę $\sqrt{2}$. Proporcja $\sqrt{2}$ jest proporcją "podwojenia powierzchni" i jest podstawowa dla kartki formatu A4. Gdy osiem tych "rożków Gwiazdki" zestawimy kwadratowymi ścianami do siebie, to otrzymamy jeszcze jeden model Gwiazdki. Natomiast dwa takie modele pasują do siebie trójkątnymi ścianami i tworzą wtedy sześcian o krawędzi dwa razy mniejszej niż najdłuższa krawędź Gwiazdki, równa w przybliżeniu krawędzi dużego sześciennego pudełka.

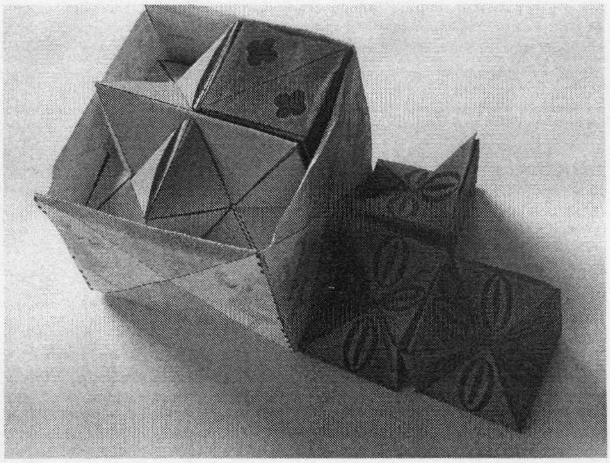
4 Dołączamy jedną jeszcze dużą siatkę 'łódki", pasującą do całej kartki formatu A4.

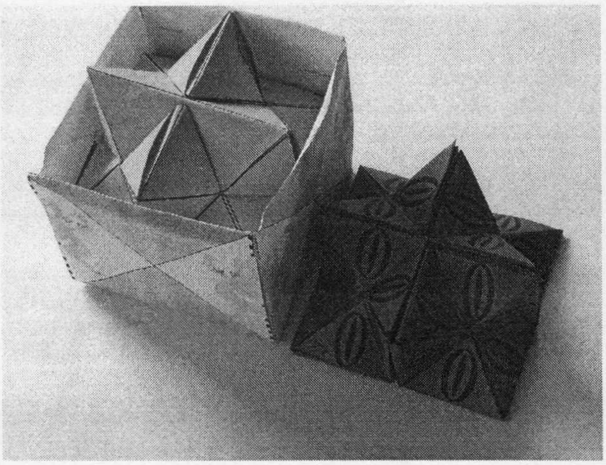
5 Na koniec, dołączamy jeszcze dwie plansze. Na obu są do wycięcia cztery rombowe, zygzakowate paski. Każdy z tych pasków trzeba skleić w taki sposób, aby powstał pierścień złożony z sześciu rombów. Z tych czterech pierścieni można zbudować model dwunastościanu rombowego. Każdy z tych pasków po sklejeniu daje się złoży "na płask", co ułatwia przechowywanie modelu. Liczba $\sqrt{2}$ opisuje relację dłuższych do krótszych przekątnych tych rombów.

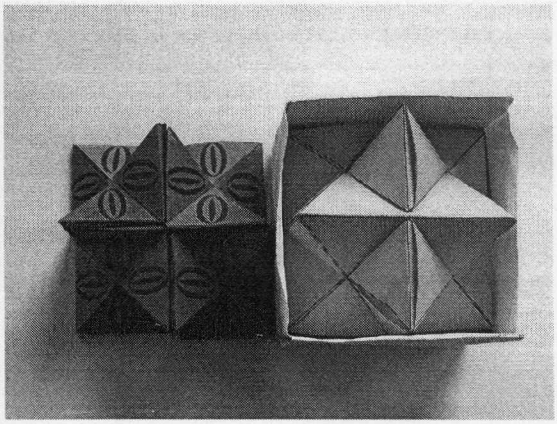


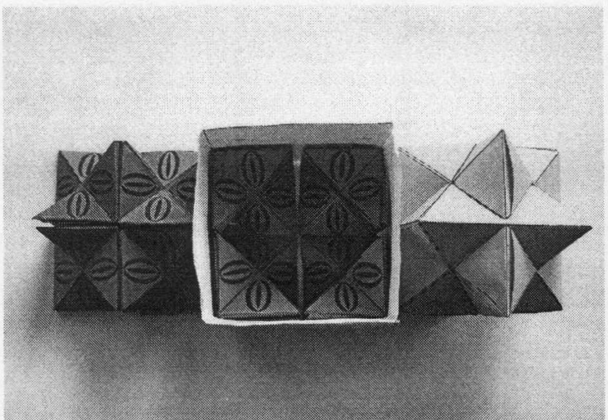


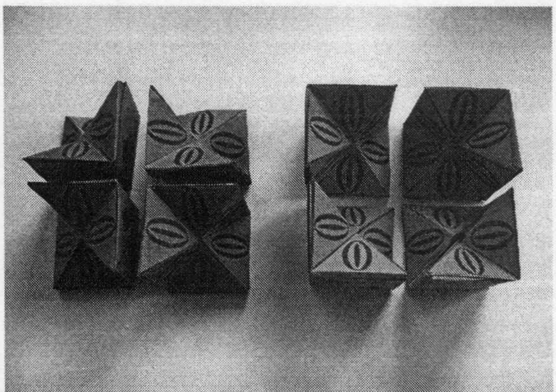


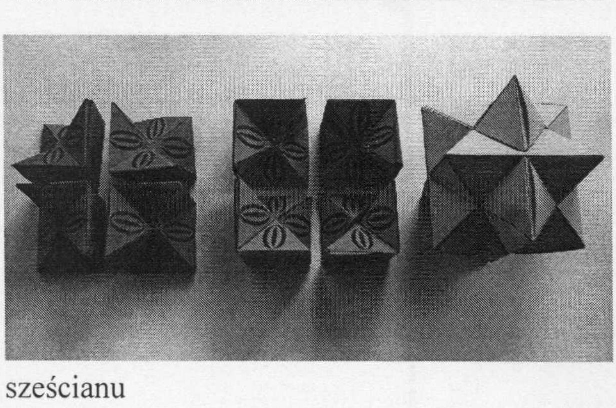




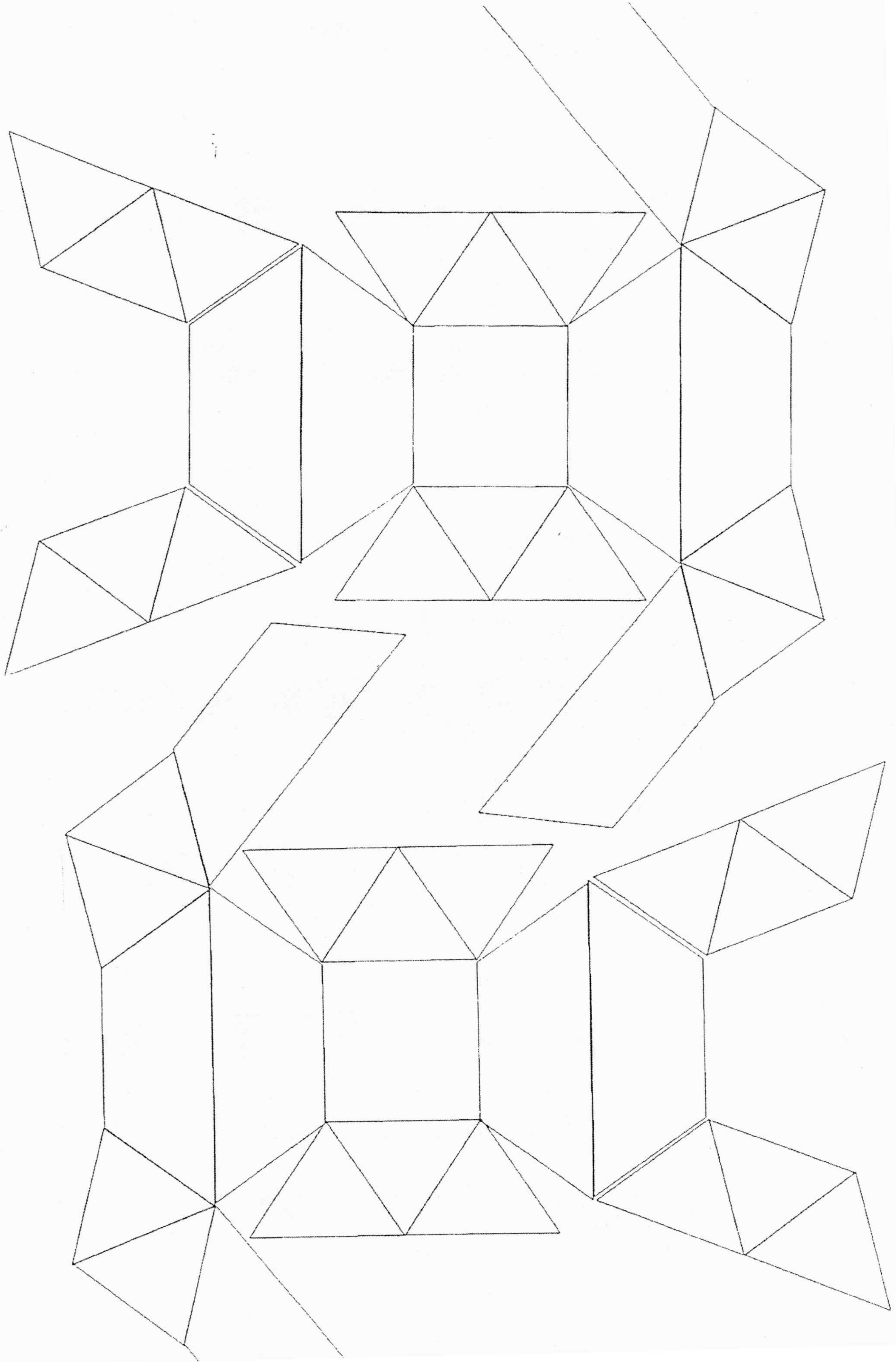


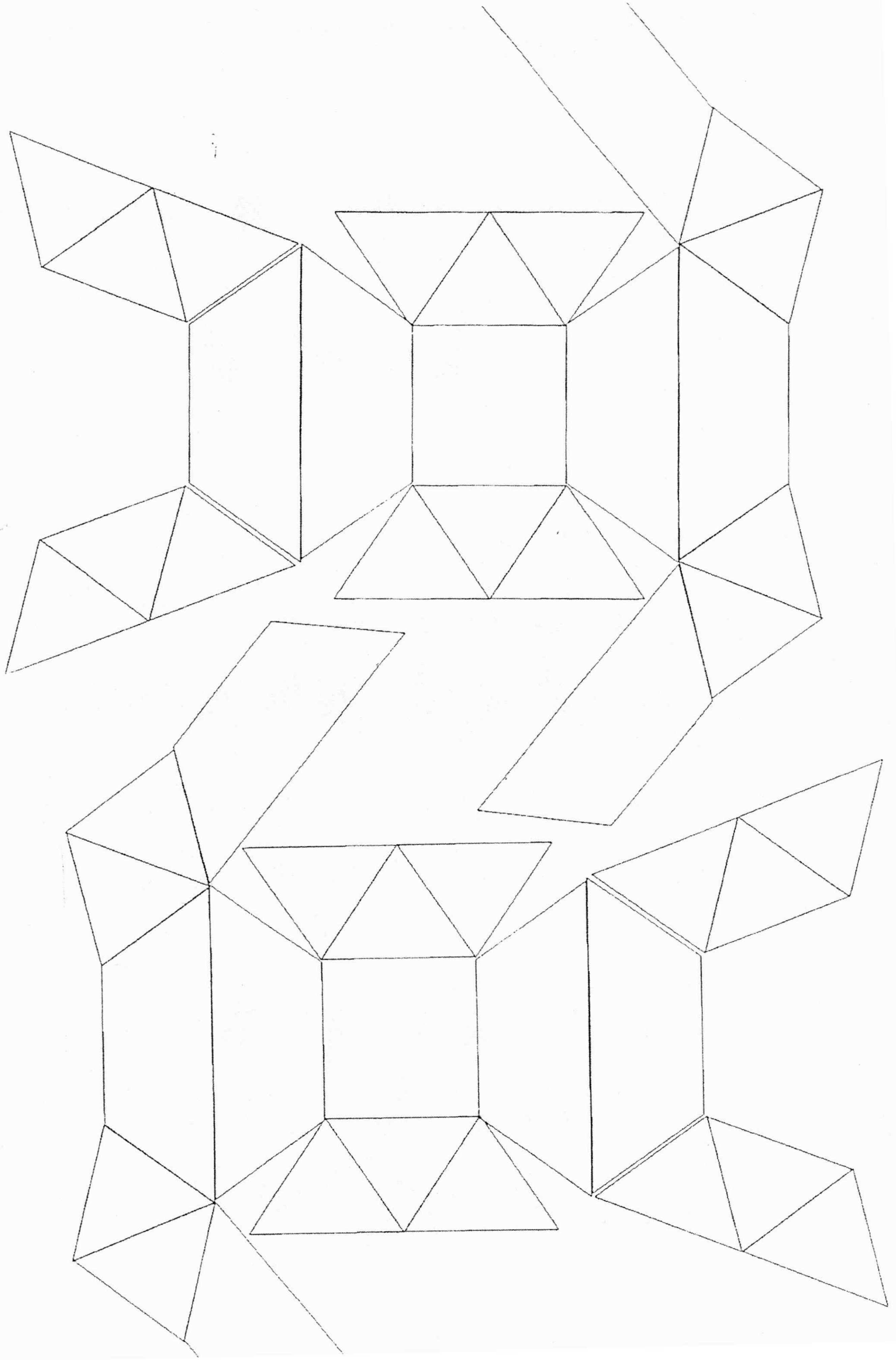


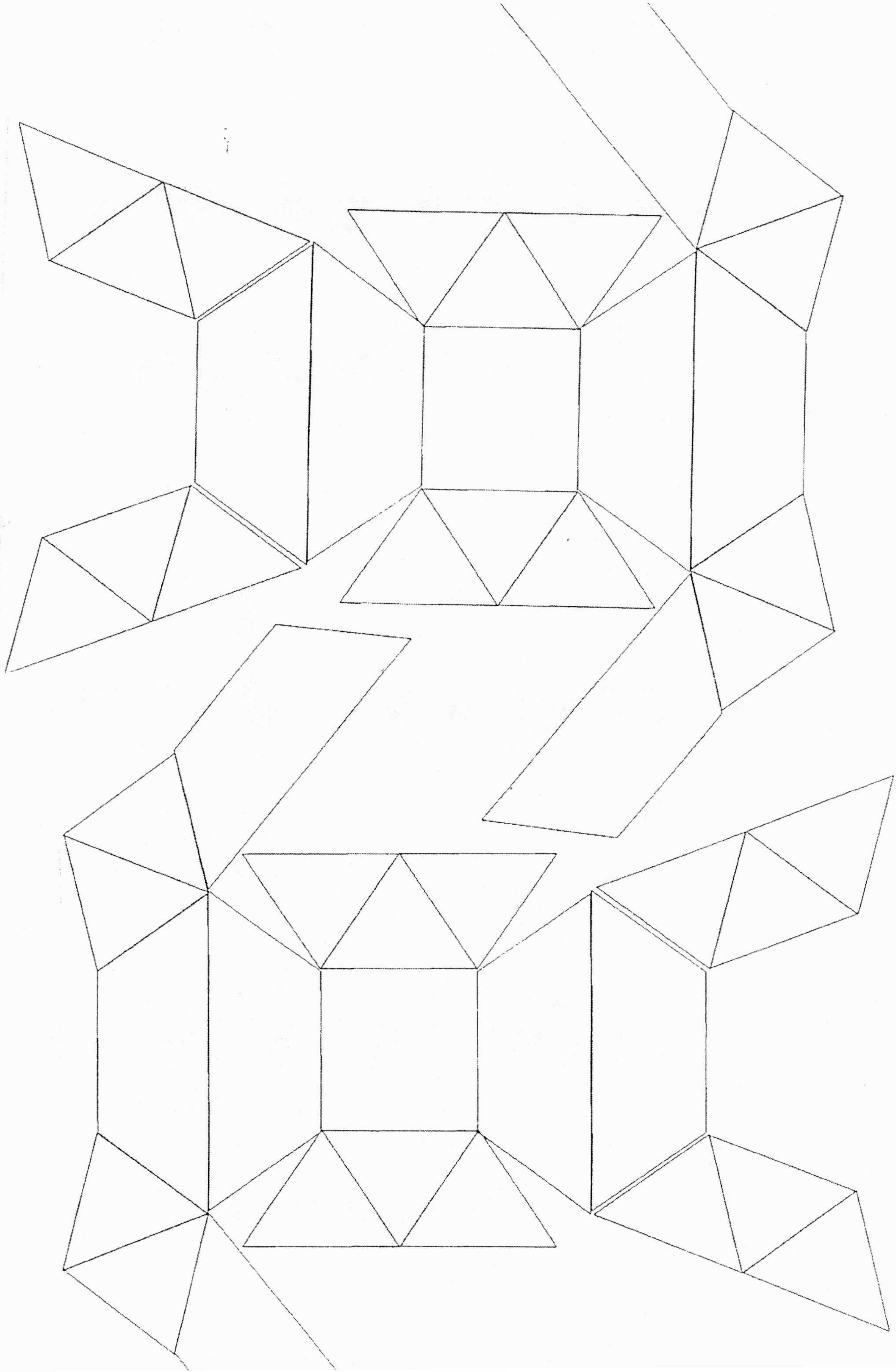


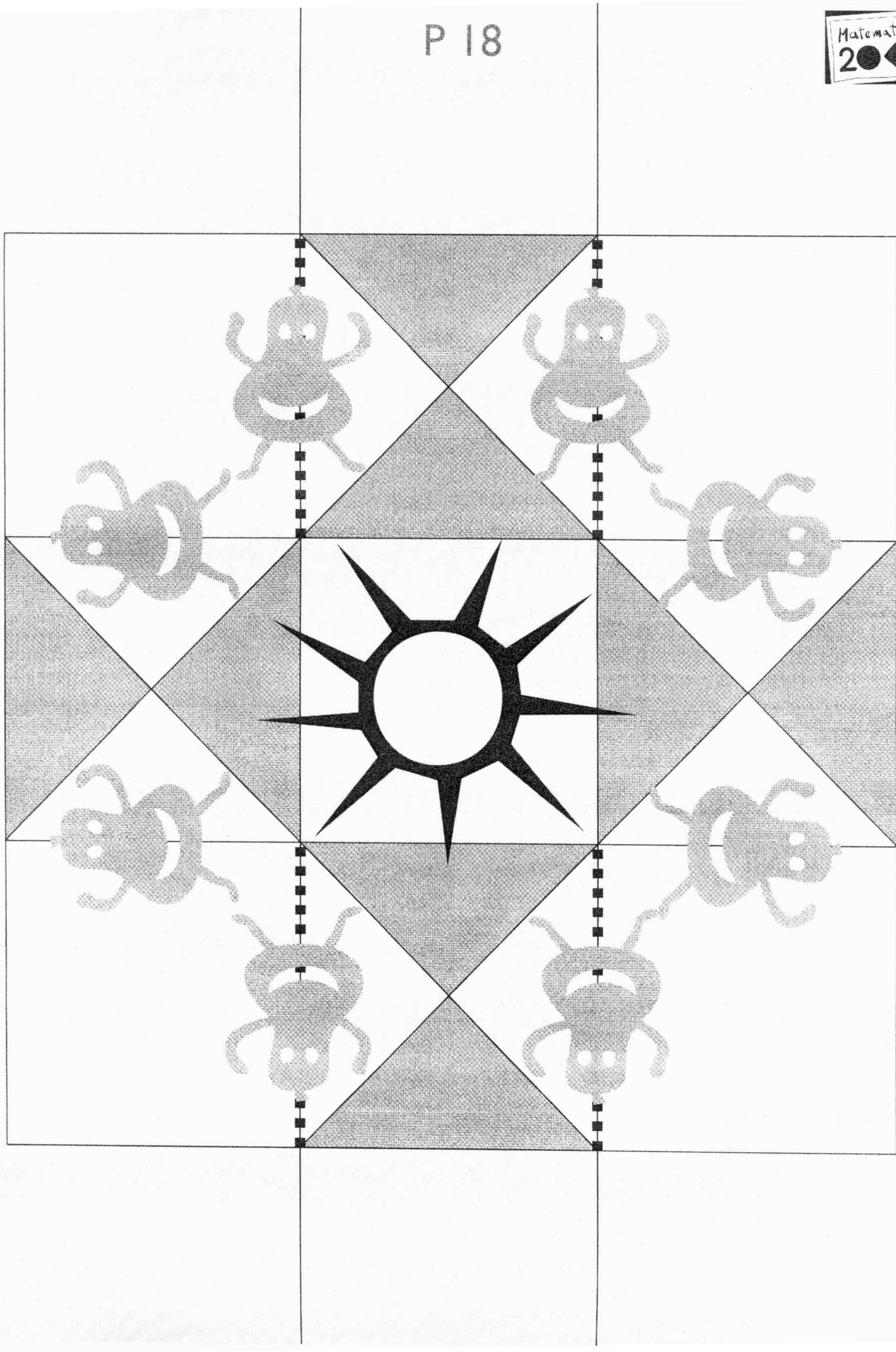


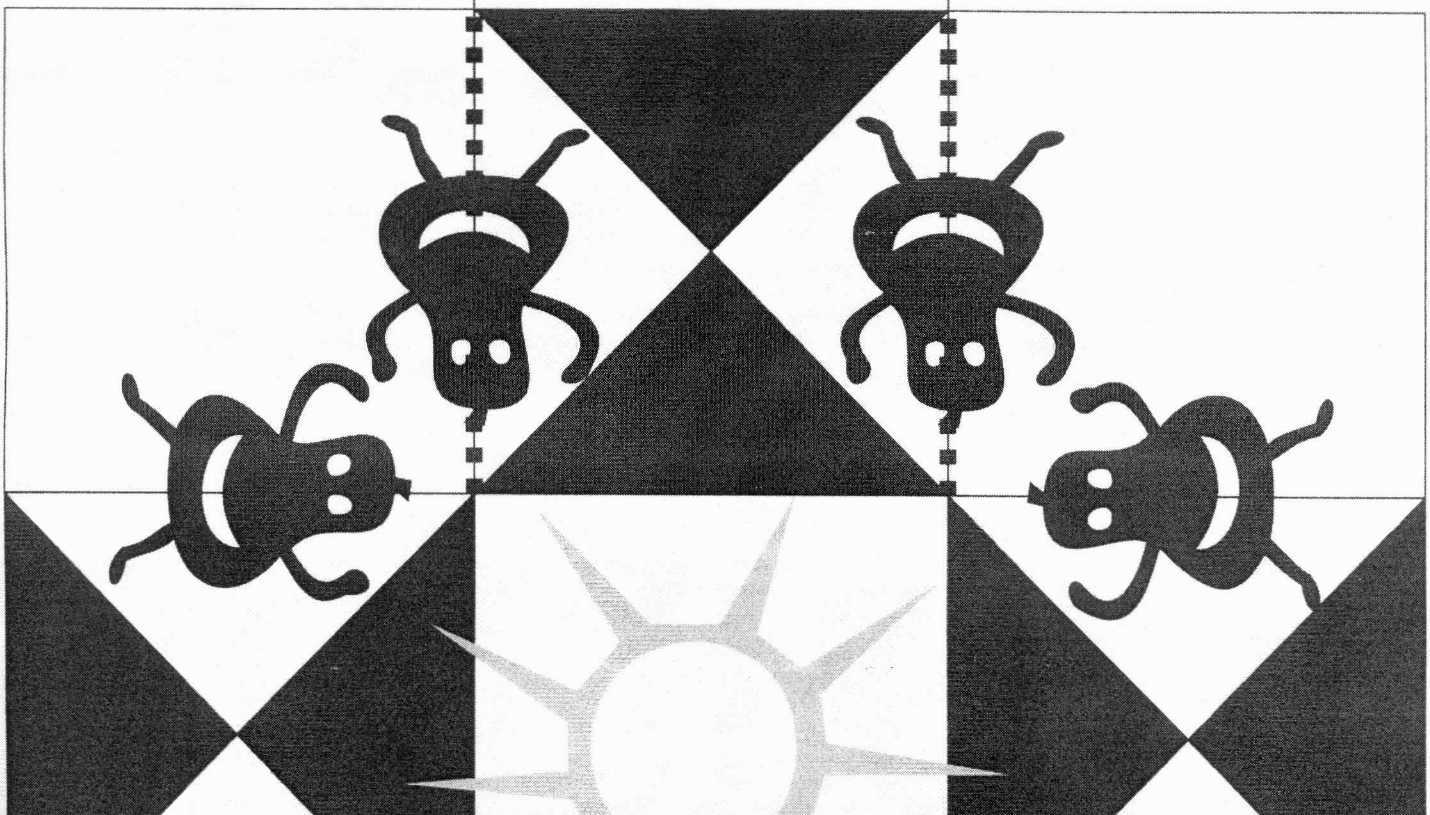
8 rożków uzupełniających Gwiazkę do sześcianu

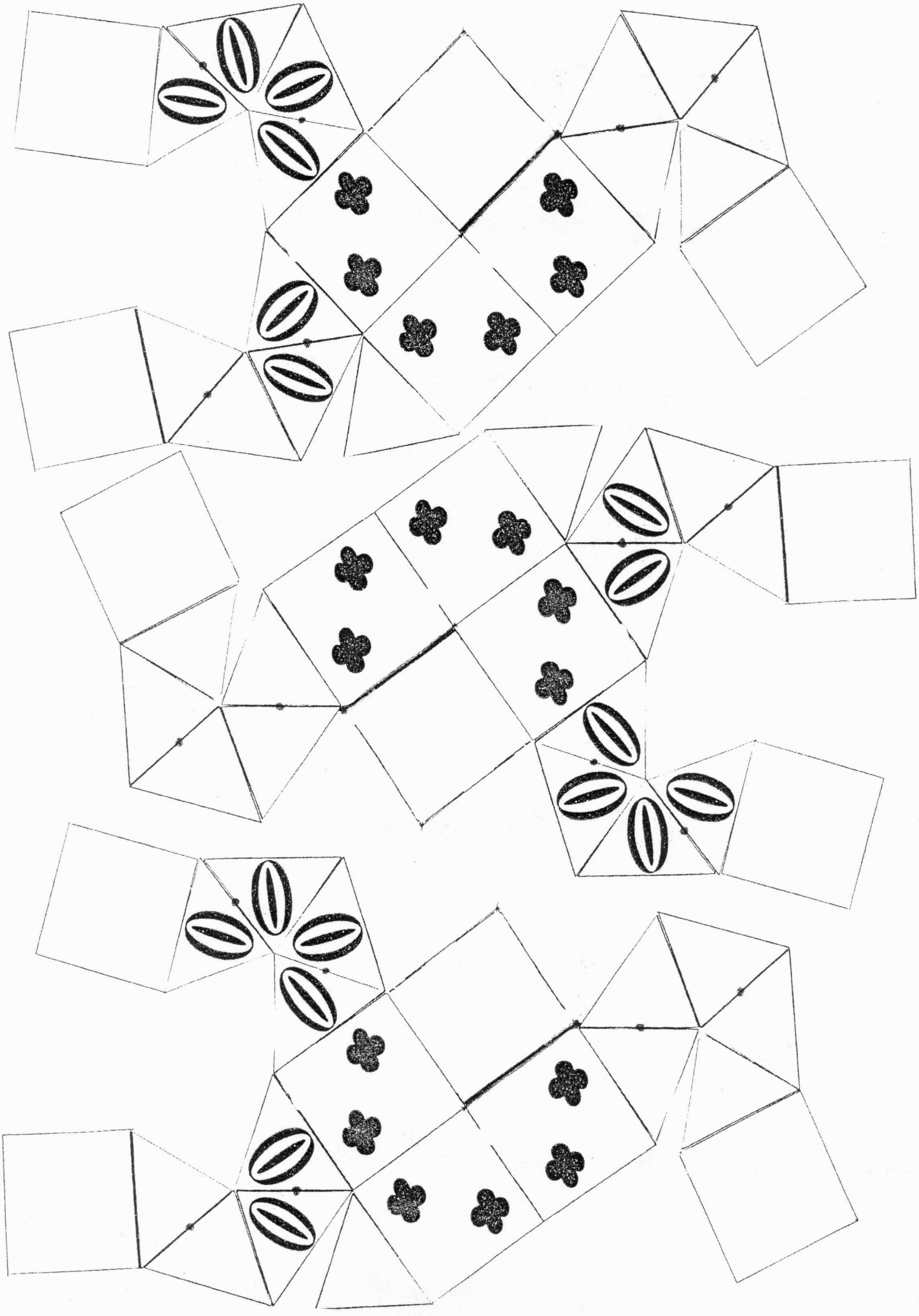


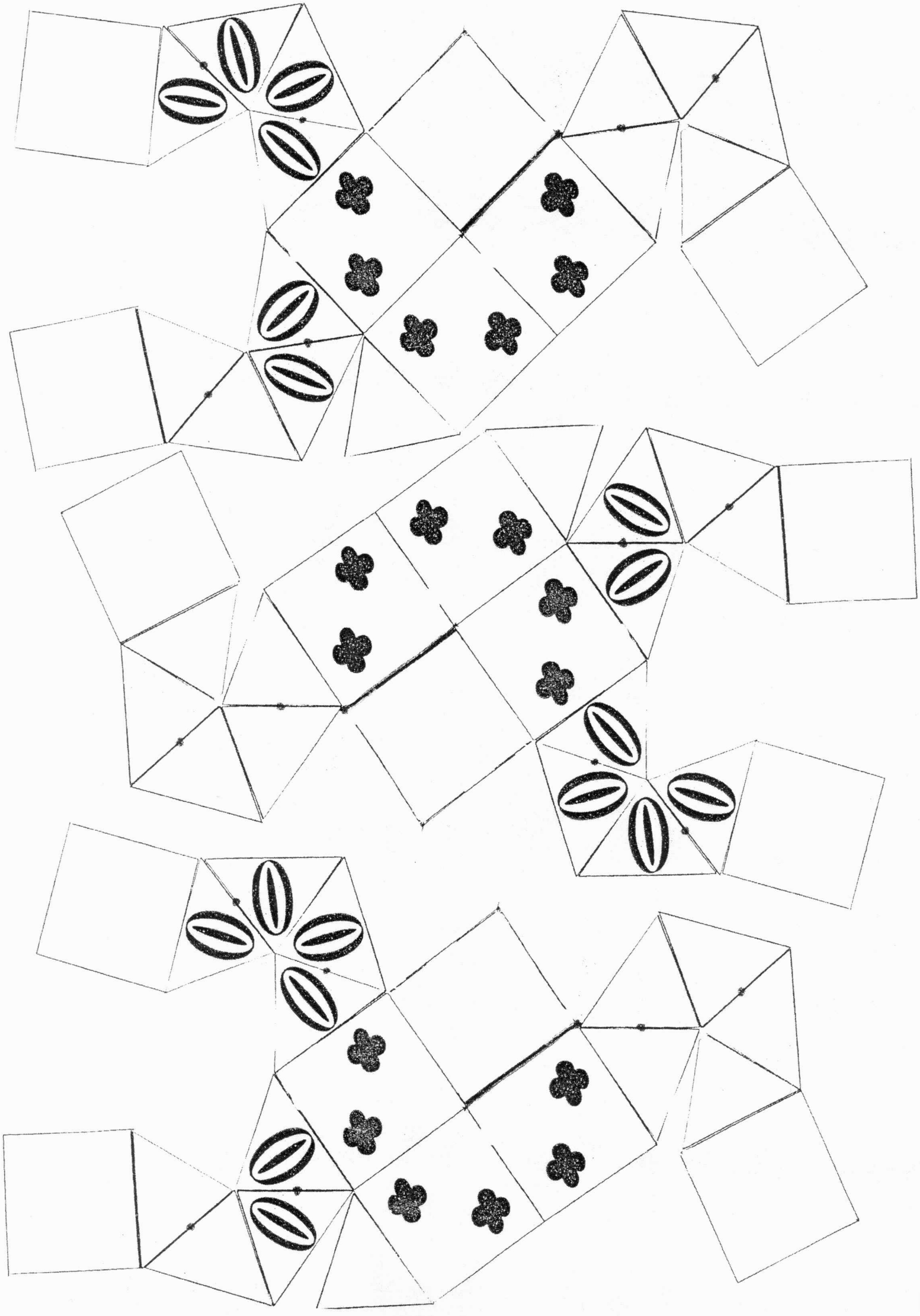


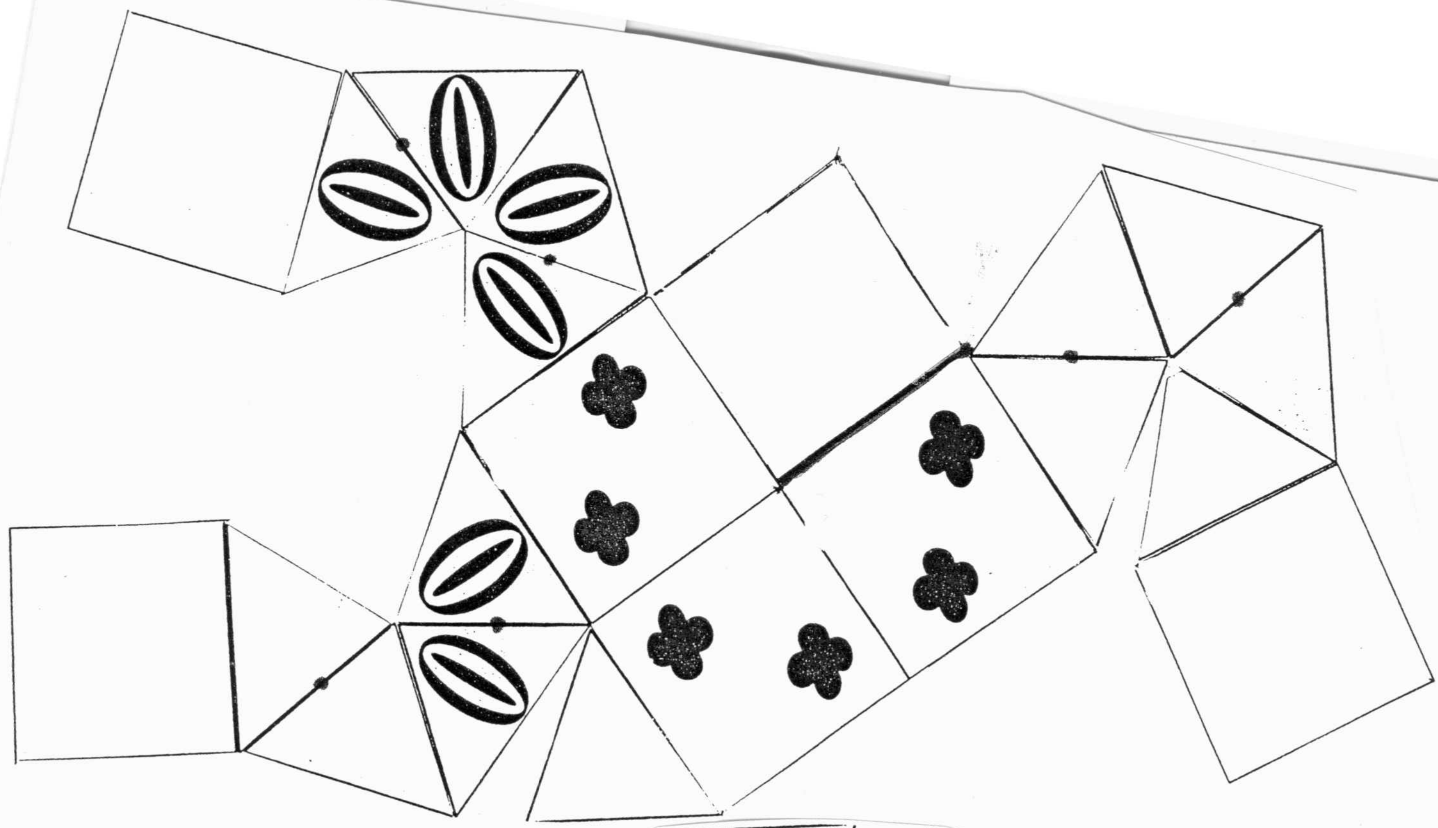


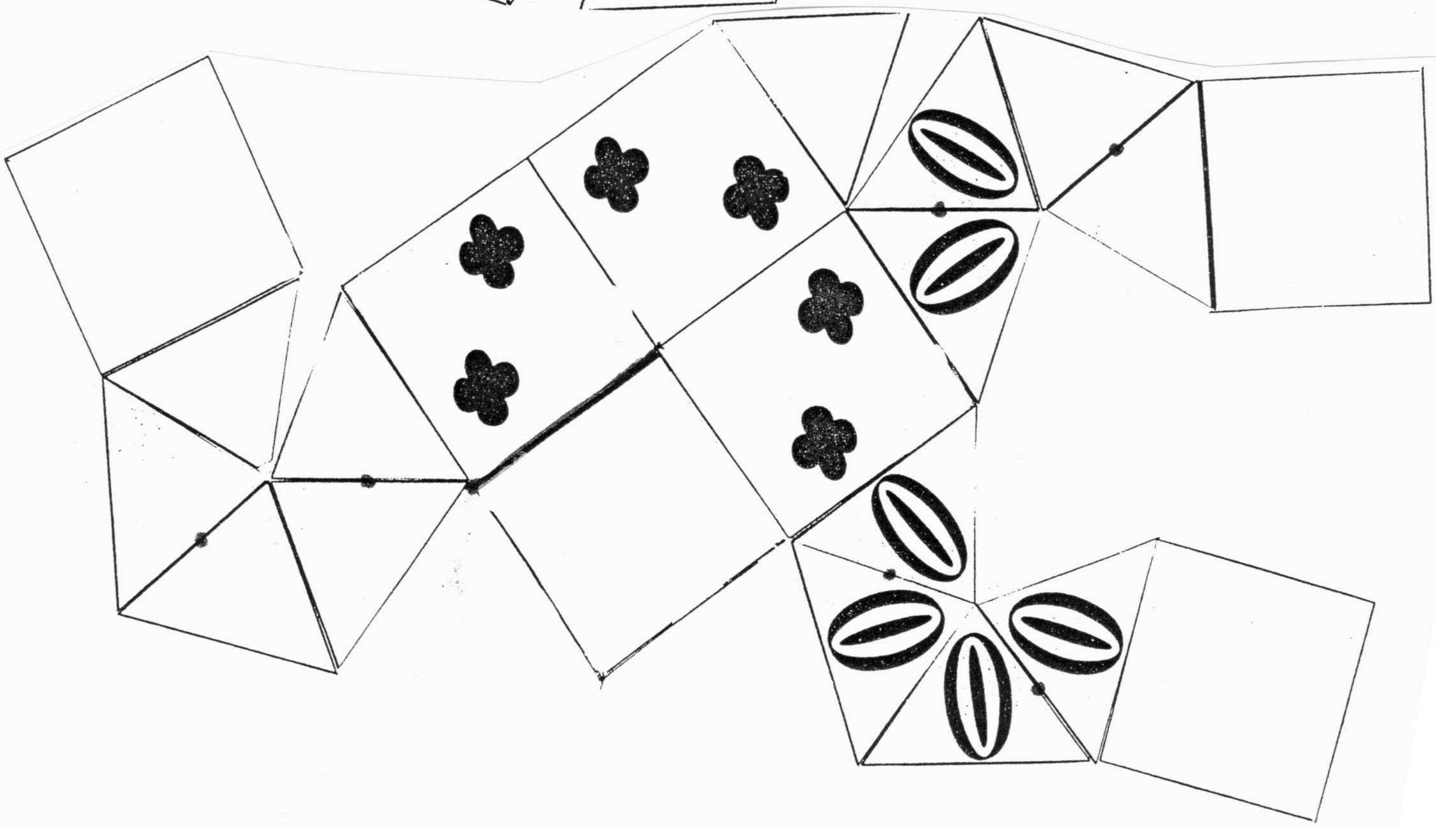


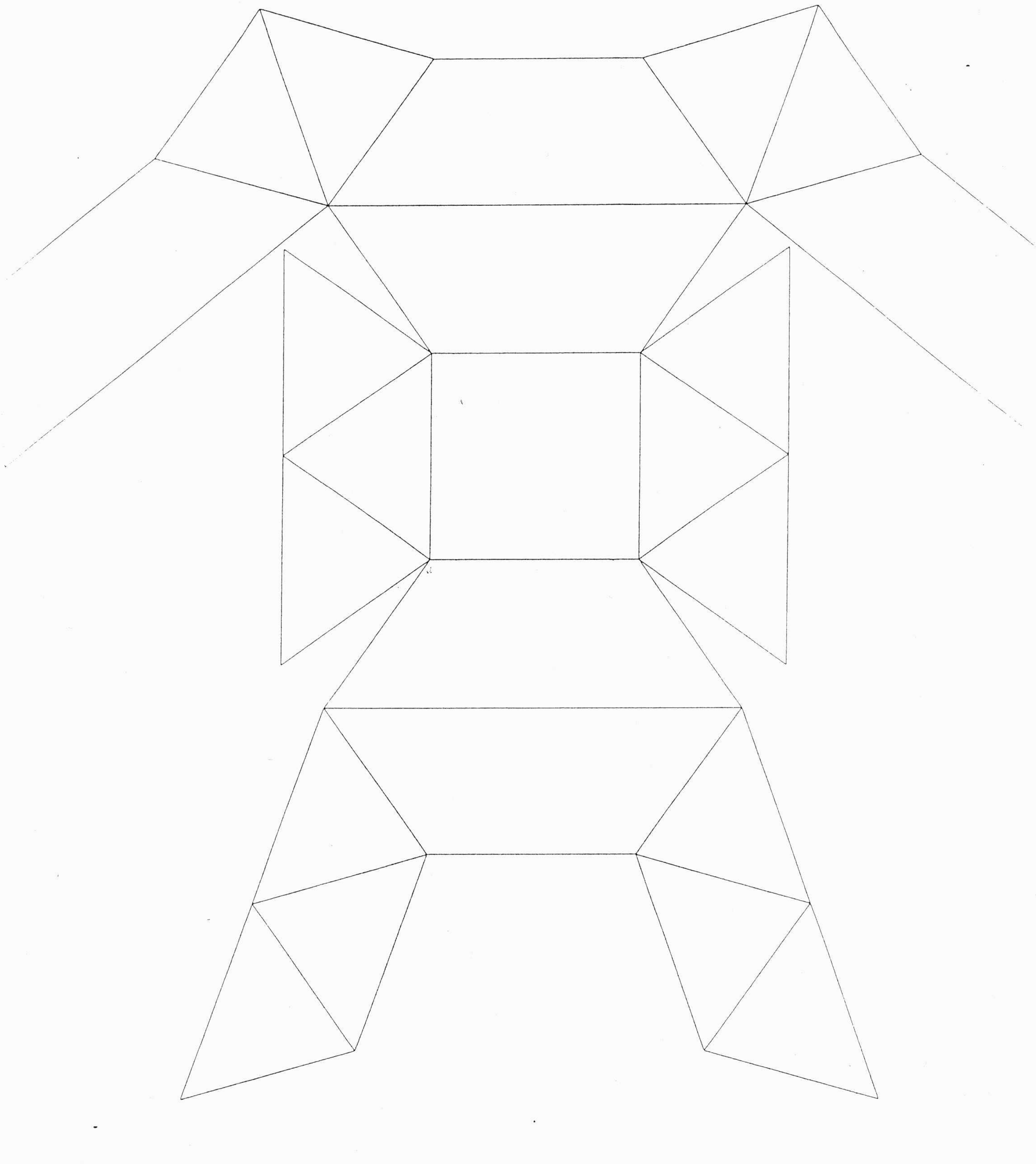


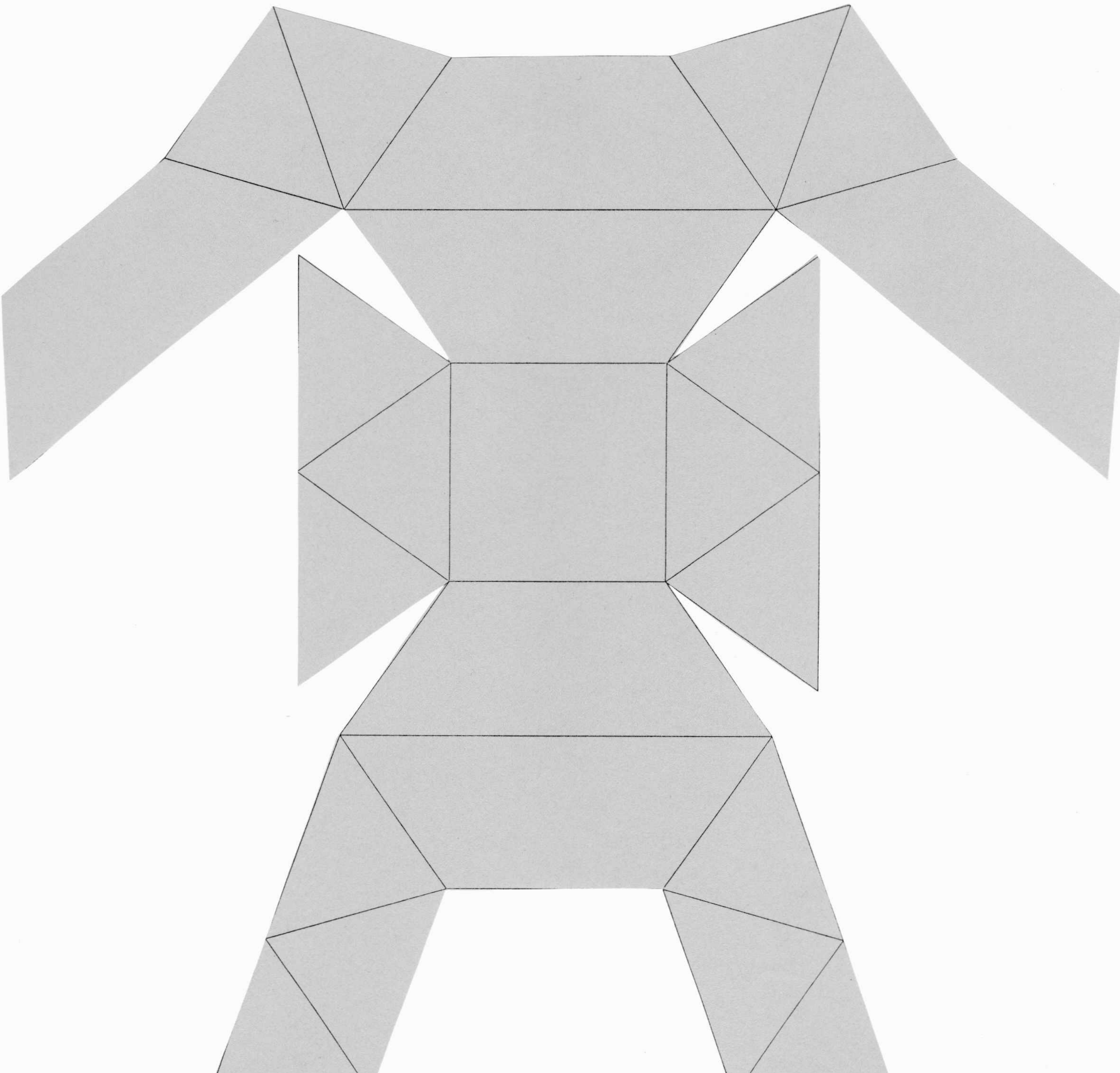








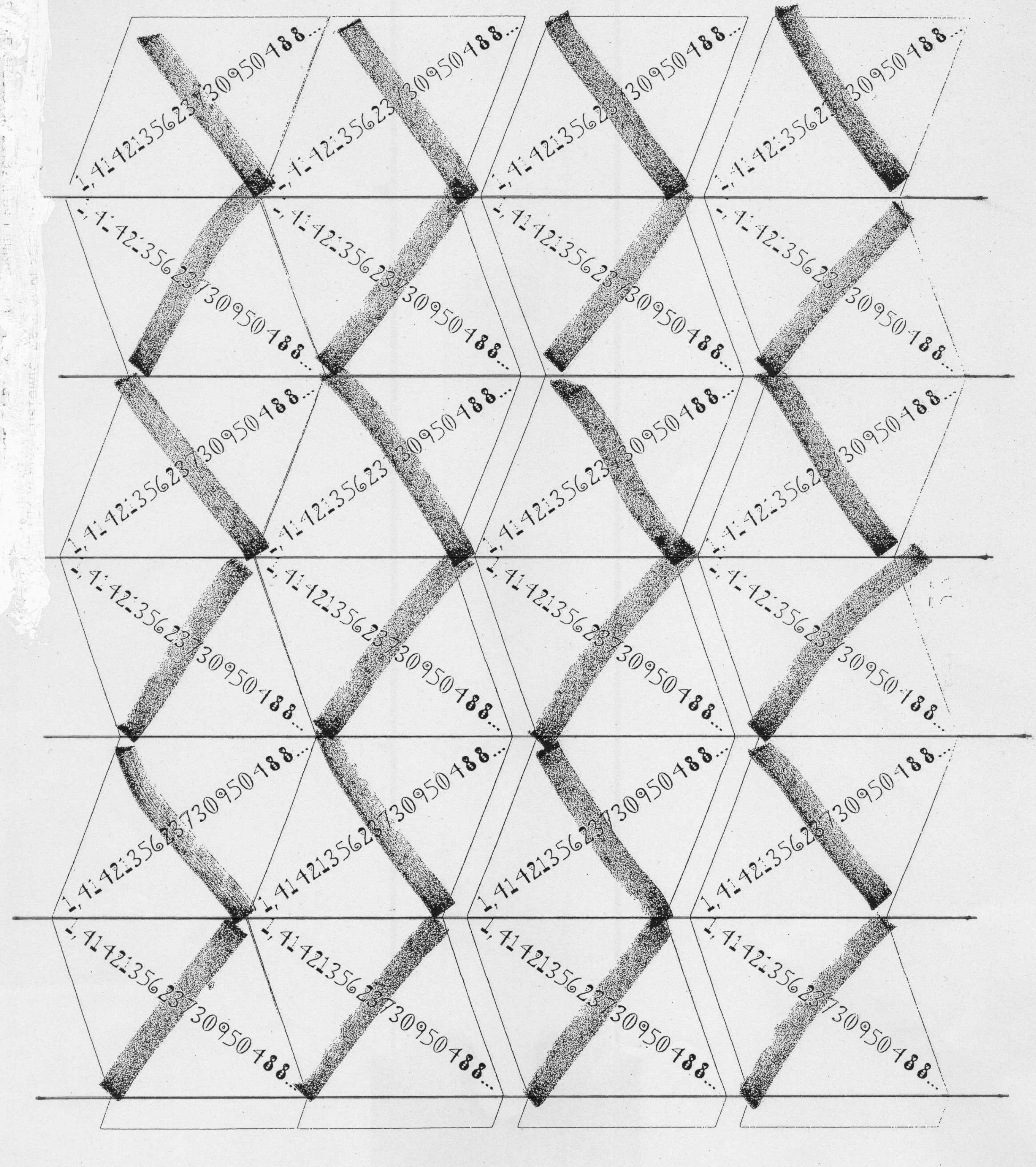


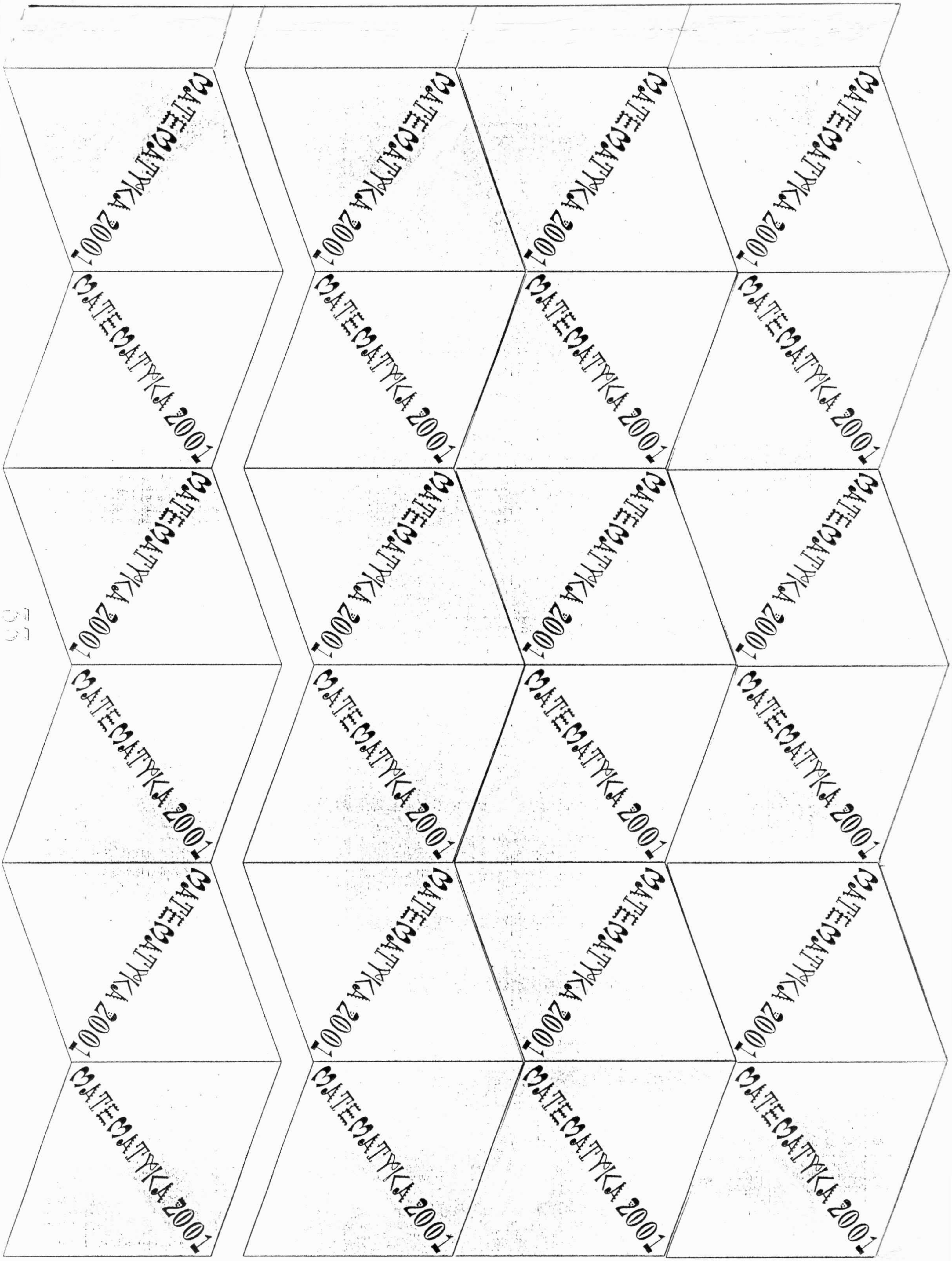


Model dwunastoscianu rombowego

Każdy z tych czterech pasków składa się z sześciu rombów. To są bardzo szczególne romby. Stosunek ich przekątnych jest równy pierwiastkowi z dwóch. Każdy z tych pasków trzeba po wycięciu nożyczkami skleić w pierścień. Następnie włożyć te pierścienie jeden w drugi, w taki sposób, że powstanie bryła o ściankach w kształcie rombów. Dwie ścianki będą podwójne, a dwie puste. Na te ścianki trzeba nałożyć trzeci pierścień w taki sposób, aby zakryć te puste. Gdy teraz przyjrzysz się uważnie, to zobaczysz, że niektóre ścianki są podwójne, a niektóre pojedyńcze. Te pojedyńcze układają się w pierścień. Na te pojedyńcze ścianki nałóż czwarty pierścień. Teraz model jest gotowy.

Dłuższe przekątne rombów zaznaczają krawędzie pewnego innego wielościanu o ścianach z trójkątów równobocznych. Krawędzi ma tyle, ile dwunastościan ścian, a ścian osiem. To jest ośmiościan regularny, platoński. Ma 6 wierzchołków, 12 krawędzi i 8 ścian.





MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001
MATEMATYKA 2001

nr 35
jesień 2000 roku

NiM

NAUCZYCIELE I MATEMATYKA